

Die unerwartete Instabilität weißer Zwerge

F. Herrmann



www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de

Dass die Sonne stabil ist, ist überraschend; man würde es zunächst nicht erwarten.

Dass der weiße Zwerg instabil ist, ist überraschend; man würde es zunächst nicht erwarten.

Beides hat dieselbe Ursache.

Behandlung in Lehrbüchern (Schule, Hochschule, Wikipedia):
verwirrend, unnötig umständlich

Wird der zentrale Kern eines Sterns zu einem Weißen Zwerg komprimiert, so ist mit der Zunahme der Dichte von etwa 1 g/cm^3 auf mehr als 100 kg/cm^3 eine grundlegende Zustandsänderung verbunden. In einem Hauptreihenstern erzeugt die thermische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} k T$ der von allen Elektronen entblößten Kerne einen Druck, der dem Gravitationsdruck standhalten kann. Zwar nehmen auch die Elektronen an der ther-

Energie erzeugt Druck?

Erzeugt auch Druck Energie?

Druckgleichgewicht? Wie geht das?

Wird der zentrale Kern eines Sterns zu einem Weißen Zwerg komprimiert, so ist mit der Zunahme der Dichte von etwa 1 g/cm^3 auf mehr als 100 kg/cm^3 eine grundlegende Zustandsänderung verbunden. In einem Hauptreihenstern erzeugt die thermische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} k T$ der von allen Elektronen entblößten Kerne einen Druck, der dem Gravitationsdruck standhalten kann. Zwar nehmen auch die Elektronen an der thermischen Bewegung teil, wegen ihrer rund 2000-mal kleineren Masse tragen sie jedoch kaum zum Druck bei. Das ändert sich, wenn der Bereich des Sterns, in dem sich die Elektronen bewegen können, wegen der Kontraktion zunehmend kleiner wird. Die Elektronen befinden sich nun in einem *Potentialtopf*, in dem die

thermische Energie

Gravitationsdruck

Potentialtopf

Wird der zentrale Kern eines Sterns zu einem Weißen Zwerg komprimiert, so ist mit der Zunahme der Dichte von etwa 1 g/cm^3 auf mehr als 100 kg/cm^3 eine grundlegende Zustandsänderung verbunden. In einem Hauptreihenstern erzeugt die thermische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} k T$ der von allen Elektronen entblößten Kerne einen Druck, der dem Gravitationsdruck standhalten kann. Zwar nehmen auch die Elektronen an der thermischen Bewegung teil, wegen ihrer rund 2000-mal kleineren Masse tragen sie jedoch kaum zum Druck bei. Das ändert sich, wenn der Bereich des Sterns, in dem sich die Elektronen bewegen können, wegen der Kontraktion zunehmend kleiner wird. Die Elektronen befinden sich nun in einem *Potentialtopf*, in dem die *Quantisierung* der Energie zu Energiestufen führt, die

thermische Energie

Gravitationsdruck

Potentialtopf

Quantisierung der Energie

Wird der zentrale Kern eines Sterns zu einem Weißen Zwerg komprimiert, so ist mit der Zunahme der Dichte von etwa 1 g/cm^3 auf mehr als 100 kg/cm^3 eine grundlegende Zustandsänderung verbunden. In einem Hauptreihenstern erzeugt die thermische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} k T$ der von allen Elektronen entblößten Kerne einen Druck, der dem Gravitationsdruck standhalten kann. Zwar nehmen auch die Elektronen an der thermischen Bewegung teil, wegen ihrer rund 2000-mal kleineren Masse tragen sie jedoch kaum zum Druck bei. Das ändert sich, wenn der Bereich des Sterns, in dem sich die Elektronen bewegen können, wegen der Kontraktion zunehmend kleiner wird. Die Elektronen befinden sich nun in einem *Potentialtopf*, in dem die *Quantisierung* der Energie zu Energiestufen führt, die im Vergleich zur thermischen Energie mit kleiner werdendem Radius ständig anwachsen und deshalb zunehmend die Energieverteilung bestimmen. Gegenüber der Boltzmann-Verteilung wird dieser Zustand als

thermische Energie

Gravitationsdruck

Potentialtopf

Quantisierung der Energie

Boltzmann-Verteilung

Wird der zentrale Kern eines Sterns zu einem Weißen Zwerg komprimiert, so ist mit der Zunahme der Dichte von etwa 1 g/cm^3 auf mehr als 100 kg/cm^3 eine grundlegende Zustandsänderung verbunden. In einem Hauptreihenstern erzeugt die thermische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} k T$ der von allen Elektronen entblößten Kerne einen Druck, der dem Gravitationsdruck standhalten kann. Zwar nehmen auch die Elektronen an der thermischen Bewegung teil, wegen ihrer rund 2000-mal kleineren Masse tragen sie jedoch kaum zum Druck bei. Das ändert sich, wenn der Bereich des Sterns, in dem sich die Elektronen bewegen können, wegen der Kontraktion zunehmend kleiner wird. Die Elektronen befinden sich nun in einem *Potentialtopf*, in dem die *Quantisierung* der Energie zu Energiestufen führt, die im Vergleich zur thermischen Energie mit kleiner werdendem Radius ständig anwachsen und deshalb zunehmend die Energieverteilung bestimmen. Gegenüber der Boltzmann-Verteilung wird dieser Zustand als **entartetes Elektronengas** bezeichnet. Für die quantisierten Energiewerte E_n im linearen Potentialtopf gilt ($\rightarrow 11.3.1$):

thermische Energie

Gravitationsdruck

Potentialtopf

Quantisierung der Energie

Boltzmann-Verteilung

entartetes Elektronengas

sierten Energiewerte E_n im linearen Potentialtopf gilt (\rightarrow 11.3.1):

$$E_n = \frac{h^2}{8 m_e a^2} n^2 \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Eine *Verkleinerung* der Breite a des Potentialtopfs führt zu einer *Zunahme* der Energiewerte. Für Elektronen wie auch für Protonen und Neutronen, die alle zur Klasse der **Fermionen** gehören, gilt das Pauli-Prinzip, d.h. die

Fermionen, Pauliprinzip

sierten Energiewerte E_n im linearen Potentialtopf gilt (\rightarrow 11.3.1):

$$E_n = \frac{h^2}{8 m_e a^2} n^2 \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Eine *Verkleinerung* der Breite a des Potentialtopfs führt zu einer *Zunahme* der Energiewerte. Für Elektronen wie auch für Protonen und Neutronen, die alle zur Klasse der **Fermionen** gehören, gilt das Pauli-Prinzip, d.h. die Zustände im Potentialtopf können mit jeweils *nur zwei* Teilchen mit entgegengerichteter Spineinstellung be-

Fermionen, Pauliprinzip

Spineinstellung

Ist bei einer Volumenverkleinerung die Zunahme dieser Energie *größer* als die Abnahme der potentiellen Gravitationsenergie, so kann sich ein Gleichgewichtszustand einstellen. Dies ist bei einem Weißen Zwerg der Fall: Der vom entarteten Elektronengas erzeugte Druck p – es gilt $p = dE/dV$ – hält hier dem Gravitationsdruck das Gleichgewicht.

Ein solcher Sternrest hat in etwa die Größe unserer Erde, aber die Masse unserer Sonne. Im Innern besteht er aus Kohlenstoff- und Sauerstoffkernen sowie Elektronengas. Die klassische Teilchenbewegung reicht nicht aus, um der Gravitation das Gleichgewicht zu halten. Entscheidend ist hier ein Quanteneffekt der Elektronen. Ohne Freisetzung von Energie im Innern presst die Gravitation die Teilchen extrem eng zusammen. Für die Elektronen bleibt nur wenig Raum. Für ein in einem **→ Quantenpferch** eingesperrtes Elektron gilt: Je enger der Raum, desto größer ist seine mittlere Bewegungsenergie. Die eingesperrten Elektronen üben eine Kraft nach außen aus, die der Gravitationskraft das Gleichgewicht hält.

Wikipedia

Die **Bewegungsenergie** eines Teilchens in einem Hauptreihenstern ist überwiegend **thermische Energie**, so dass als Zustandsgleichung die **allgemeine Gasgleichung** verwendet werden darf. In einem Weißen Zwerg tritt aufgrund der hohen Dichte eine nicht thermische Komponente hinzu, die auf einem quantenmechanischen Effekt beruht. Dies führt zu einer besonderen Zustandsgleichung, bei welcher der Druck nur noch von der Dichte, aber nicht mehr von der Temperatur abhängt. Man bezeichnet einen solchen Zustand als *entartet*.

All das trifft auch auf die Erde zu!















Lane-Emden-Gleichung 1870

Man steckt $p(\rho)$ hinein, und erhält die Dichteverteilung über dem Radium r .

Für $p \sim \rho^{5/3}$ lautet die Gleichung

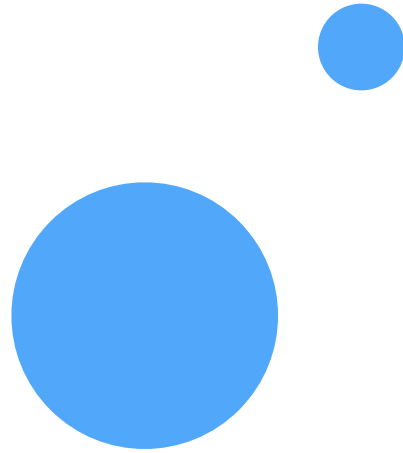
$$\frac{5}{3}K \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho(r)^{-1/3} \frac{d\rho(r)}{dr} \right) = -4\pi G \rho(r)$$

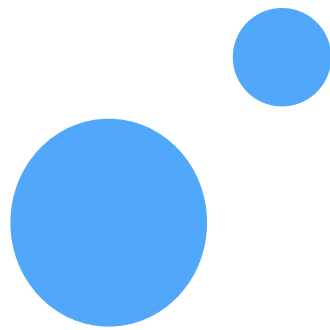
Überraschendes Ergebnis: $R \sim m^{-1/3}$

Je größer die Masse, desto kleiner der Radius.

für harte Materie: $R \sim \sqrt[3]{m}$

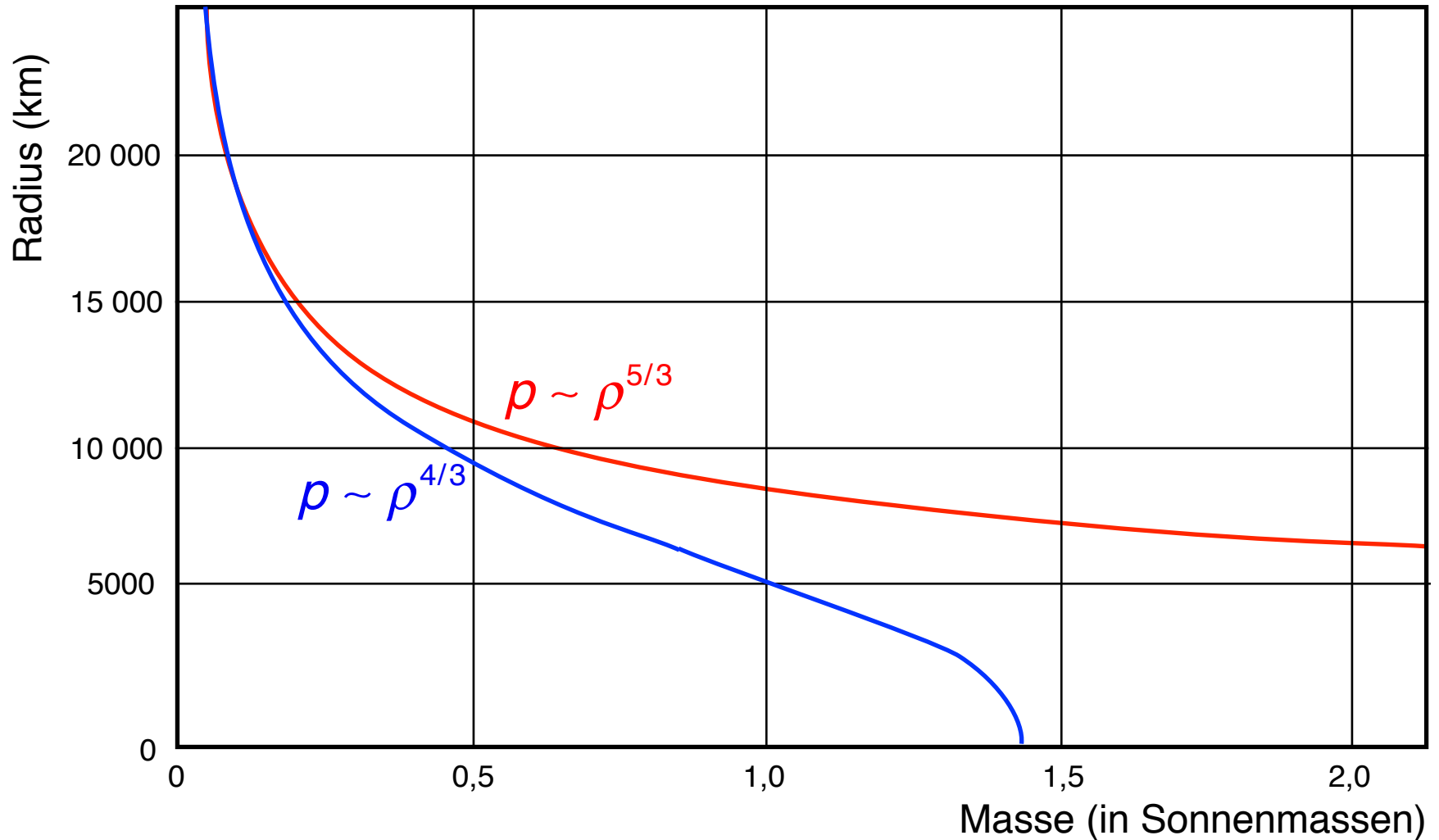
Wegen des $1/r$ -Potenzials







Je größer die Masse, desto kleiner der Radius.



EN

DE